**Chapitre 5**

**Problème de transport**

**Introduction**

Il s’agit de déterminer la façon optimale d’acheminer des biens à partir de m entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Nous allons faire l’hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminer vers les différentes destinations.

Nous allons illustrer ce problème à partir de l’exemple suivant.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 | D2 | D3 | D4 | Offre |
| E1 | 3 | 2 | 7 | 10 | 450T |
| E2 | 4 | 3 | 1 | 6 | 450T |
| E3 | 9 | 8 | 11 | 5 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

**Présentation et modélisation**

**Représentation par réseau :**

b1

b4

b3

b2

a3

a2

a1

On introduit les notations suivantes :

xij = quantité transportée de Ei à Dj

cij = coût unitaire du transport de Ei à Dj

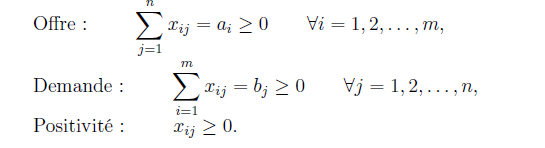
ai = offre de la source Ei,

bj = demande de la destination Dj

On suppose que les ai sont positifs ai >= 0 et de même pour les bj >= 0.

Il s’agit de minimiser le coût de transport. La fonction objective s’écrit : 

Sous les contraintes



**Remarque :** Le problème de transport n’a pas de solution que si la disponibilité totale est supérieure ou égale à la demande totale.



S’il y a égalité entre l’offre et la demande on dit que le problème est équilibré.



**Remarque :** Si le problème n’est pas équilibré, on doit créer une distribution fictive avec comme demande l’excédent de l’offre par rapport à la demande. Les coûts de transport pour cette distribution sont évidemment nuls.

**Résolution de problème de transport**

**Remarque** On peut utiliser la méthode du simplexe pour résoudre le problème de transport, pourtant on s’intéresse à d’autres méthodes, tout simplement parce que l’application du simplexe pour résoudre un Problème de transport est très pénible car on doit à chaque fois utiliser des tableaux (ou matrices) plus ou moins grands.

L’algorithme utilisé pour résoudre le problème de transport est basé sur l’algorithme du simplexe en tenant compte de la structure du problème :

— Déterminer une SBR.

— Déterminer les variables d’entrée et de sortie

L’algorithme de transport cherche à construire itérativement le coût des SBRs dont les coûts sont de plus en plus faibles. Après un certain nombre d’itérations, il atteint une solution optimale SBRO. Chaque solution est construite à partir de la précédente en modifiant la quantité affiché dans une case et en procédant aux ajustements requis pour conserver la réalisabilité (admissibilité) de la solution d’où la nécessité d’avoir une SBR initiale.

**Remarque :** le coût total Z associé à une SBR s’obtient comme le produit scalaire des coûts unitaires cij et des quantités expédiées xij

**Détermination de solution de base réalisable**

**Méthode du coin nord-ouest CNO** : Considérer la cellule située dans le coin le plus haut à gauche.

**Etape 1** : Affecter à la cellule courante la quantité de produit maximale possible. Puis on ajuste l’offre et la demande.

**Etape 2** : Se déplacer d’une cellule vers le droit si l’offre n’est pas épuisée. Se déplacer d’une cellule vers la base si la demande n’est pas satisfaite.

**Etape 3** : Rejeter jusqu’au moment toute l’offre est allouée.

Soit le tableau de transport suivant :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 | D2 | D3 | D4 | Offre |
| E1 | 3 | 2 | 7 | 10 | 450T |
| E2 | 4 | 3 | 1 | 6 | 450T |
| E3 | 9 | 8 | 11 | 5 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

Application de la méthode du CNO

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 | D2 | D3 | D4 | Offre |
| E1 | 400 | 50 |  |  | 450T |
| E2 |  | 400 | 50 |  | 450T |
| E3 |  |  | 500 | 250 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

Le tableau donne une SBR initiale : x11=400, x12=50, x22=400, x23=50, x33=500, x34=250

Le coût total *Z* associé à cette SBR :

Zc=400×3 + 50×2 + 400×3 + 50×1 + 500×11 + 250×5

Donc Zc=9300 unité monétaire

-----------------------------------------------------------------------------------------------

**Méthode des moindres coûts** On se situe dans la cellule de coût minimal.

**Etape 1** : choisir la case (i; j) de coût minimal. Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d’épuiser la source i.

**Etape 2** : si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.

**Etape 3** : On recommence l’étape (a) à partir de la sous-matrice.

Application de la méthode des moindres coûts sur le tableau de transport :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 | D2 | D3 | D4 | Offre |
| E1 | 3 | 2 | 7 | 10 | 450T |
| E2 | 4 | 3 | 1 | 6 | 450T |
| E3 | 9 | 8 | 11 | 5 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 | D2 | D3 | D4 | Offre |
| E1 |  | 450 |  |  | 450T |
| E2 |  |  | 450 |  | 450T |
| E3 | 400 |  | 100 | 250 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

Le tableau donne une SBR initiale : x12=450, x23=450, x31=400, x33=100, x34=250

Le coût total *Z* associé à cette SBR :

Zc=400×9 + 450×2 + 450×1 + 100×11 + 250×5

Donc Zc=7300 unité monétaire

**Test d’optimalité et amélioration de solution**

On associe à chaque ligne *i* et chaque colonne *j* des multiplicateurs *Ui* et *Vj*

**Etape 1 :** on détermine pour les variables de base, les multiplicateurs *Ui* et *Vj* tels que

*cij - Ui - Vj* = 0

Pour résoudre ce système, il suffit de fixer la valeur d’une variable pour déduire les autres.

**Etape 2 :** calculer pour les variables hors base, les coûts relatifs :

*cij - Ui - Vj* = *Fij*

**Etape 3 :** Test d’optimalité :

— La solution courante est optimale si et seulement si ∀ (*i; j*) *Fij* ≥ 0.

— S’il existe (*i; j*) tel que *Fij <* 0 alors la solution courante n’est pas optimale, et on applique la quatrième étape.

**Etape 4 :** Amélioration de la solution :

— Variables d’entrée : on calcule la quantité *Fsr* = min {*Fij; Fij* < 0*}* la variable d’entrée est la variable hors base associées au coût relatif *Fsr*.

Si *Fsr* atteint en plusieurs variables, on prend celle du coût minimal.

Et on pose *xsr* = *w* puis on ajuste les variables de base sans toucher aux autres variables hors base.

— Variable de sortie : on calcule *w*, après on affecte à *xsr* la plus grande valeur de *w* puis on actualise le tableau. Le coût total associé à la nouvelle SBR est augmenté de : *Fsr* × *w*.

**Application**

On reste dans le même exemple et à partir de la SBR obtenue par la méthode CNO

, déterminons une autre SBR :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 (V1) | D2 (V2) | D3 (V3) | D4 (V4) | Offre |
| E1 (U1) | 3 | 2 | 7 | 10 | 450T |
| E2 (U2) | 4 | 3 | 1 | 6 | 450T |
| E3 (U3) | 9 | 8 | 11 | 5 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 (V1) | D2 (V2) | D3 (V3) | D4 (V4) | Offre |
| E1 (U1) | 400 | 50 |  |  | 450T |
| E2 (U2) |  | 400 | 50 |  | 450T |
| E3 (U3) |  |  | 500 | 250 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

On a la SBR initiale :

x11=400, x12=50, x22=400, x23=50, x33=500, x34=250

**Etape 1 :** On calcule pour les variables de base les multiplicateurs *Ui* et *Vj* :

3-U1-V1=0

2-U1-V2=0

3-U2-V2=0

1-U2-V3=0

11-U3-V3=0

5-U3-V4=0

On fixe U1=0 et on calcul les autres multiplicateurs

U1=0 ⇒ V1= 3 et V2=2 et ainsi de suite on détermine les autres valeurs de Ui et Vj

On trouve finalement :

U2=1, V3=0, U3=11, V4=-6

**Etape 2 :** oncalcule pour les variables hors base, les coûts relatifs :

*cij - Ui - Vj* = *Fij*

F13= 7-U1-V3 =7-0-0=7

F14= 10-U1-V4=10-0-6=

F21= 4-U2-V1=4-1-3=0

F24= 6-U2-V4=6-1+6=11

F31= 9-U3-V1=9-11-3=-5

F32= 8-U3-V2=8-11-2=-5

**Etape 3 :** Test d’optimalité

F31 etF32 sont négatifs donc la solution n’est pas optimale. Allez à étape 4

**Etape 4 :** Amélioration de la solution :

— Variables d’entrée : on calcule la quantité *Fsr* = min { F31 ,F32 *} =* min { -5,-5 *}=-5*

Puisque F31 etF32 ont la même valeur, on prend F32 carson coût est minimal

Et on pose *x32* = *w* puis on ajuste les variables de base sans toucher aux autres variables hors base.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 (V1) | D2 (V2) | D3 (V3) | D4 (V4) | Offre |
| E1 (U1) | 400 | 50 |  |  | 450T |
| E2 (U2) |  | 400-w | 50+w |  | 450T |
| E3 (U3) |  | w | 500-w | 250 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

— Variable de sortie : on calcule *w*, après on affecte à *x32* la valeur de *w* puis on actualise le tableau.

w= min {400, 500}=400

Variable entrante en base : x32

Variable sortante de base : x22

Actualisation du tableau :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Entrepôt | D1 (V1) | D2 (V2) | D3 (V3) | D4 (V4) | Offre |
| E1 (U1) | 400 | 50 |  |  | 450T |
| E2 (U2) |  |  | 450 |  | 450T |
| E3 (U3) |  | 400 | 100 | 250 | 750T |
| Demande | 400T | 450T | 550T | 250T | 1650T |

Nouvelle SBR : x11=400, x12=50, x23=450, x32=400, x33=100 et x34=250

Le coût total associé à la nouvelle SBR est augmenté de : *F32 +Fsr* ×*w*.

Z=9300+ (-5) ×400=7300unité monétaire

*On peut le vérifier facilement : Z=400\*3+ 50\*2+400\*8+450\*1+100\*11+250\*5= 7300*

**Vérification de l’optimalité**

**Etape 1 :** On calcule pour les variables de base les multiplicateurs *Ui* et *Vj* :

3-U1-V1=0

2-U1-V2=0

8-U3-V2=0

1-U2-V3=0

11-U3-V3=0

5-U3-V4=0

On fixe U1=0 et on calcul les autres multiplicateurs

U1=0 ⇒ V1= 3 et V2=2 et ainsi de suite on détermine les autres valeurs de Ui et Vj

On trouve finalement :

U3=6, V3=5, U2=-4, V4=-1

**Etape 2 :** oncalcule pour les variables hors base, les coûts relatifs :

*cij - Ui - Vj* = *Fij*

F13= 7-0-5=2

F14= 10-0+1=11

F21= 4+4-3=5

F22= 3+4-2=5

F23= 11+4-5=10

F31= 9-6-3=0

**Etape 3 :** Test d’optimalité

Tous les couts relatifs sont ≥ donc la solution est optimale

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté comment modéliser et résoudre un problème de transport ainsi que les différentes méthodes qui nous permettent d’obtenir une solution de base réalisable (Nord-Ouest, Coût minimum).